

על מדידת תחום שבת במשנה, משוואת החבל במשנה (?)

מתוך חיבור שהוגש כעבודת גמר לקראת התואר MA "מוסמך אוניברסיטה": סוגיות מתמטיות בתלמוד מבט השוואתי עם המתמטיקה בעת העתיקה

סוגיות מתימטיות בספרות חז"ל

מבוא - תחום השבת

"תחום שבת" הוא השטח שבו מותר לאדם להלך ברגליו בשבת, ביום הכיפורים וביום טוב. שטח זה הוא בדרך כלל 2,000 אמות כ-1 ק"מ לכל כיוון מחוץ לגבול השטח העירוני שבו נמצא האדם בשעת כניסת השבת או החג. ישנו איסור דרבנן לצאת בשבת, ביום טוב או ביום הכיפורים מחוץ לתחום שבת. איסור זה נקרא גם "איסור תחומין".

מדידת תחום השבת

המדידה נעשית בחבל פשתן של 50 אמות (כ-25 מטרים). יש צורך בחבל באורך 50 אמות בדיוק, לא קצר יותר ולא ארוך יותר. כל מדידה של 50 אמות נעשית באופן רציף, ומתחילה מקצה המדידה שלפניה. במקרה ויש מכשול בקצה קטע 50 האמות, כגון נהר, ניתן לחזור מרחק ידוע לאחור (למשל 25 אמות, חצי החבל), ולהתחיל ממנו את קטע 50 האמות, ולאחר מכן להשלים במקום אחר את מרחק החזרה.

האם משוואת החבל טמונה בין שולי ההלכה שתקנו חז"ל?

משוואת החבל היא משוואה הבאה לפתור פרמטרים שונים במדידת חבל מתוח. תיאור המשוואה בספר מתמטיקל הנדבוק עמוד 19. בסוגיה במשנה נבחן פסיקה הלכתית על רקע פתרון משוואת החבל ונשאל, כיצד פתרו חז"ל את הבעיה המתמטית בדיוק רב מבלי שתיאור המשוואה ופתרונה היה ידוע בעת העתיקה.

"אין המשוחות ממצים את המידות"

שנינו, "מי שיצא חוץ לתחום אפילו אמה אחת לא יכנס רבי אלעזר אומר שתיים יכנס שלש לא יכנס. רבי שמעון או' אפילו חמש עשרה אמות יכנס שאין המשוחות ממצים את המידות מפני הטועים". [1]

כוונת ר' שמעון היא, שהיות וחבל המודדים לא נמתח עד הסוף, נמצא שהמיקום שסימנו המודדים אינו מדויק ובפועל לא נמדד מרחק של 2,000 אמה אלא פחות. מסיבה זו אומר ר' שמעון שאי הדיוק הוא בשיעור חמש עשרה אמה. לכאורה, המספר שנקב ר' שמעון שרירותי. האומנם?

ניתוח מתמטי מעמיק של סוגיה זו באמצעות "משוואת החבל" מצביע לכאורה שמספר זה אינו אקראי. [2]

להלן הניתוח המתמטי. [3]

המודדים היו משתמשים בחבל שאורכו 50 אמה ומכפילים מדידתם ב 40 על מנת לקבל מדידת 2,000 אמה. החבל הוחזק בגובה לב האדם, "אין מודדין אלא בחבל של חמישים אמה, לא פחות ולא יתר; ולא ימוד אלא כנגד ליבו". [4]

התרשים הבא, מתאר את המדידה אילו הייתה מבוצעת באופן אידיאלי, שהחבל היה מתוח.

במקרה זה הייתה מתקבלת מדידה מדויקת ללא שגיאה. אלא שהמדידה המבוצעת אינה אידיאלית והחבל אינו מתוח כמתואר במרשם הבא ועל פיו נערך את החישוב:

יהי אורך החבל ב $Am50 = l_{rpo}$. העומס היחידי על החבל הוא משקלו העצמי. גובה החבל מעל פני הקרקע מעל הנקודה הנמוכה ביותר המשיקה לקרקע היא $Ama2.65 = h_{end}$.

הפרמטר a הוא מקדם המייצג את היחס בין מתיחות החוט (ביחידות של ניוטון) בנקודה הנמוכה ביותר לבין פילוג משקלו העצמי של החבל לכל אורכו.

הקואורדינטות של נקודה כל שהיא המייצגת את המקום הגיאומטרי של כל אחת מהנקודות שעל החבל התלוי נתונות באמצעות הפונקציות הבאות: [5].

הפרמטר s הוא המרחק של נקודה כלשהי, מרחק הנמדד מהנקודה הנמוכה ביותר של החבל לכל אורכו. לפרמטר a יחידות אורך וערכו יחושב להלן על פי הנתונים המוגדרים במשנה. המרחק של קצה החבל מהנקודה הנמוכה ביותר שלו הוא:

הקואורדינטות של קצה החבל מוגדרות בביטויים כאשר :

בהצבת הביטוי X.1 בביטוי Y.1 נקבל:

מחילוך a מהמשוואה נקבל את ערכו:

(X.1)

בידיעת הפרמטר a המרחק האופקי של קצה החבל מהנקודה הנמוכה ביותר שלו C

מכאן, שגיאת המדידה/ההפרש במדידת אורך אחת:

היות והמדידה מבוצעת ארבעים פעמים הרי שגיאת המדידה המצטברת של תחום השבת היא :

כפי שר' שמעון אומר "אפילו חמש עשרה אמה-יכנס, שאין המשוחות ממצין את המידות"

כיצד אם כן קבע ר' שמעון את סטיית הדיוק בסך חמש עשרה אמה. תיתכן סברה, שהמודדים הניחו את החבל ע"ג הקרקע, סימנו את מיקום הקצוות ורק לאחר מכן מדדו "כנגד ליבם" לקביעת שגיאת המדידה. סברה זו בעייתית שהרי לשם מה פסקה המשנה שמודדים כ"נגד ליבם" אם יכלו למדוד במדויק בהנחת החבל על הקרקע.

במשנה זו, יש תיאור בעיה מתמטית ופתרונה המדויק וכן תיאור אופן המדידה, "ולא ימוד אלא כנגד ליבו". לעומת זאת, דרך הפתרון נותרה בבחינת נעלם ויודעים כיום שפתרונה מצריך ידע מתמטי ברמה גבוהה שלא היה ידוע באותה העת.

[1] עירובין ד יא. כ"י 50 Kaufmann, Akademia, Budapest.

[2] סלוצקין, דוד. "על דיוק אריתמטי במשנה", הגיון ב', מחקרים בדרכי החשיבה של חז"ל. ירושלים, 1992, עמודים 72-75. במאמר מובאת הבעיה המתמטית ללא דרך ההגעה לפתרון.

[3] תודתי נתונה לד"ר יצחק יזרעאלי מהפקולטה להנדסה באוניברסיטת תל-אביב שסייע בידי בפתרון המשוואות במשנה זו.

[4] עירובין ה ד. כ"י 50 Kaufmann, Akademia, Budapest.

[5] Spiegel, Murray R. Theory and problems of mathematical handbook of formulas and tables. McGraw-Hill Book Company

P 29.1968